微分法（数学II）
問題編Part3

○ 関数の増加・減少

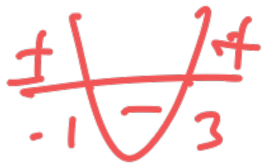
問1. 次の関数の増加・減少を調べよ。また極値があれば求めよ

(1). $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

$y = f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

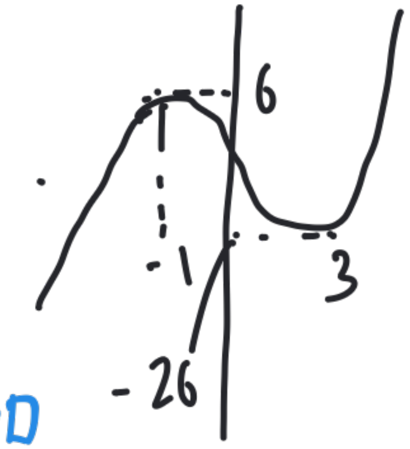
$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9.$

$= 3(x+1)(x-3)$



$f'(x) = 0$ のとき $x = -1, 3$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	6 極大	↘	-26 極小	↗



よって $(x \leqq -1,\ 3 \leqq x)$ で増加

$(-1 \leqq x \leqq 3)$ で減少

極値は $(x=-1)\ 6$

$(x=3)\ -26$

(2) $y = x^3 + 3x^2 + 12x - 1$

$y = f(x) = x^3 + 3x^2 + 12x - 1$

$f'(x) = x^2 + 6x + 12$

$= (x+3)^2 + 3 > 0$

Point

$f'(x)$ が常に 0以上や 0以下など符号が変わらない時は常に増加 若しくは常に減少する。

これより $f(x)$ は単調増加する

よって $y = f(x)$ は極値をもたない。

○グラフの描き方

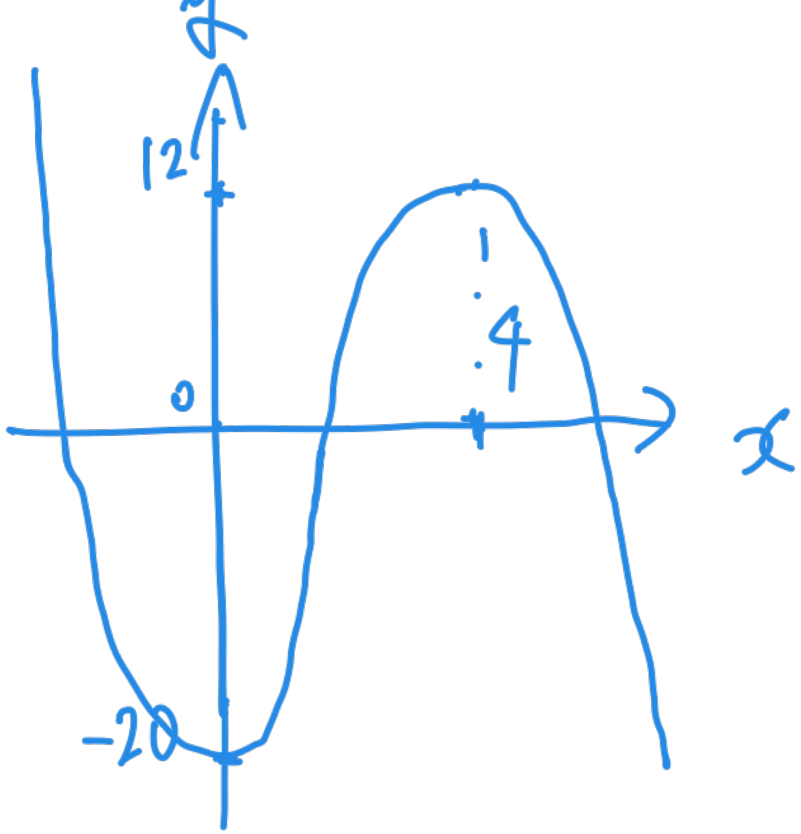
問2. 次の関数のグラフを描け. (1). $y=-x^3+6x^2-20$ (2) $y=x^3-6x^2+12x-10$

(1) $y=f(x)=-x^3+6x^2-20$

$f'(x)=-3x^2+12x$

$=-3x(x-4)$

x	…	0	…	4	…
$f'(x)$	−	0	+	0	−
$f(x)$	↘	−20	↗	12	↘
		極小		極大	



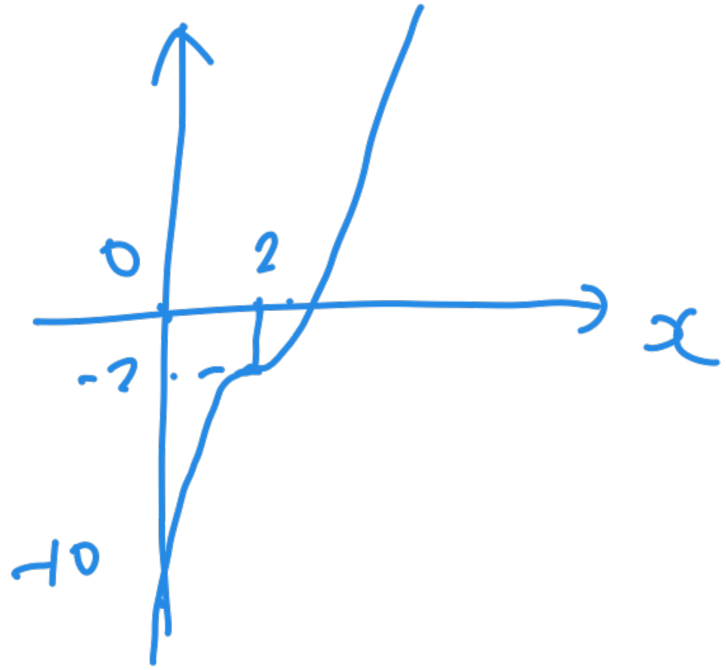
(2) $y=g(x)=x^3-6x^2+12x-10$

$g'(x)=3x^2-12x+12$

$=3(x^2-4x+4)=3(x-2)^2\geq 0$

よって. $g(x)$は増加関数である.

x	…	2	…
$g'(x)$	+	0	+
$g(x)$	↗	−2	↗



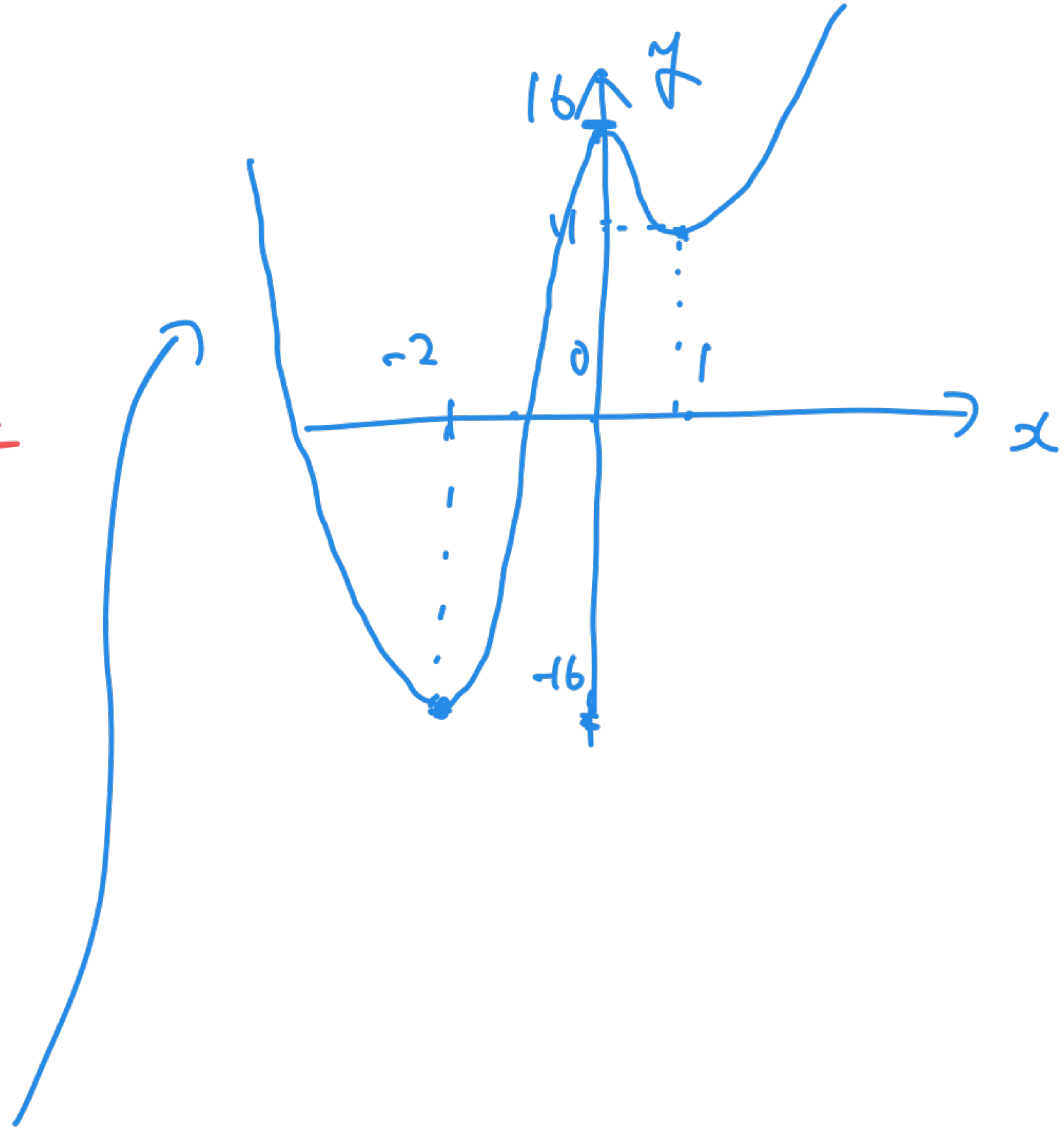
(3) $y = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 16$

$y = f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 16$

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2 - 24x$$
$$= 12x(x^2 + x - 2)$$
$$= 12x(x+2)(x-1)$$

3次式の因数分解
→ ① 共通因数をくくりだす
② 因数定理 → 組み立て除法

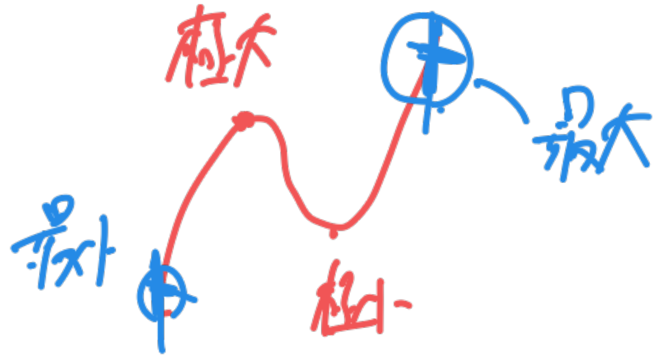
x	$\cdots$	-2	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	-16 極小	↗	16 極大	↘	11 極小	↗



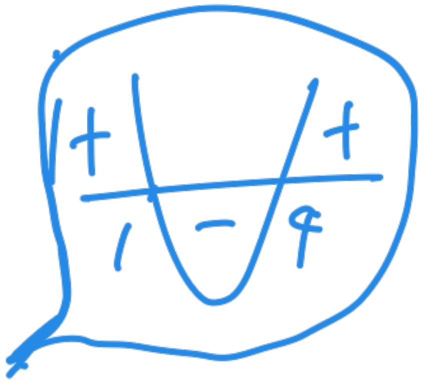
○ 最大・最小

問3. 次の関数 $f(x)$ について最大値と最小値を求めよ.

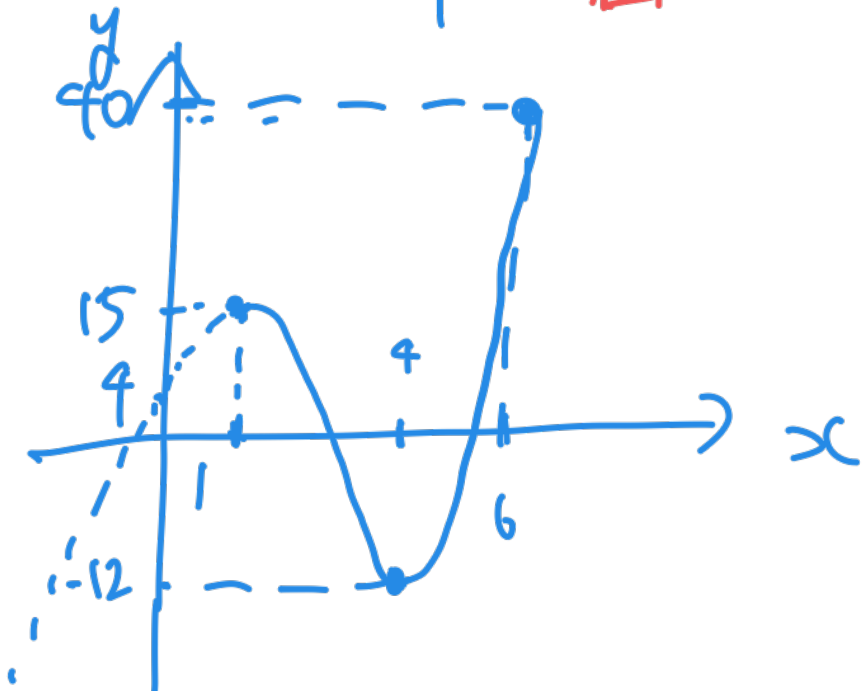
(1). $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 4$. $(1 \leqq x \leqq 6)$



$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24$$
$$= 6(x^2 - 5x + 4)$$
$$= 6(x-4)(x-1)$$



x	~~…~~	1	…	4	…	6
$f'(x)$	~~+~~	0	−	0	+	
$f(x)$	~~↗~~	15	↘	−12	↗	40
		極大		極小 min		Max



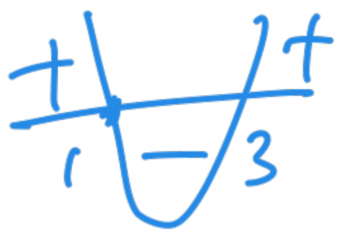
$(x=6)$ 最大値 40

$(x=4)$ 最小値 −12

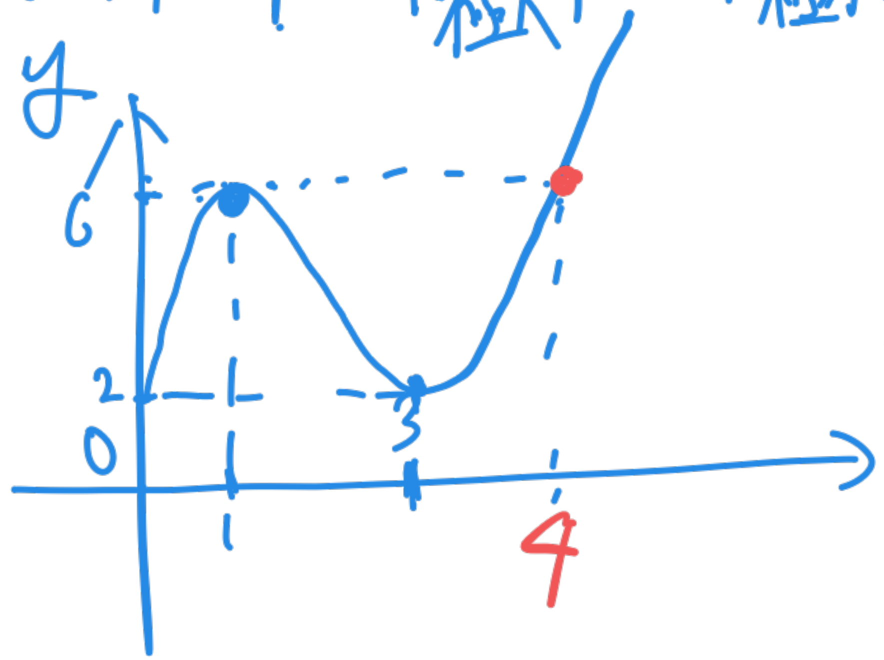
(2) $0 \leqq x \leqq a$ ($a>0$) において関数 $f(x)=x^3-6x^2+9x+2$ の最大値を求めよ

$f'(x)=3x^2-12x+9$

$\quad = 3(x-1)(x-3)$



x	0	…	1	…	3	…
$f'(x)$		+	0	−	0	+
$f(x)$	2	↗	6 極大	↘	2 極小	↗



i) $0 \leqq a \leqq \cancel{x}\ 1$ のとき

Max は $f(a)=a^3-6a^2+9a+2$

ii) $\cancel{2}\ 1 \leqq a \leqq \boxed{4}$

Max は $f(1)=6$

$f(x)=6$

$x^3-6x^2+9x+2=6$

$x^3-6x^2+9x-4=0$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -6 & 9 & -4 \\ & & 1 & -5 & 4 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}$$

$(x^2-5x+4)(x-1)$

$(x-1)^2(x-4)$

iii) $4 \leqq a$ Max は $f(a)$

$(0 \leqq a \leqq 1,\ 4 \leqq a)$ Max は $f(a)$

$\qquad = a^3-6a^2+9a+2$

$(1 \leqq a \leqq 4)$ Max は $f(1)$

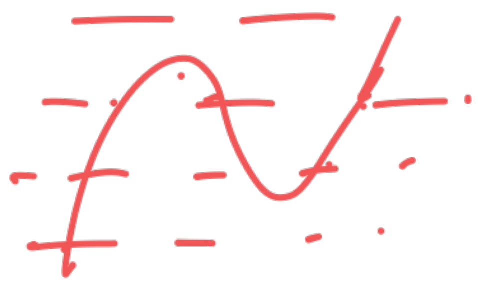
$\qquad = 6$

○ 実数解の個数

問4. 3次方程式 $x^3-3x^2-9x-m=0$ (mは実数定数)について.

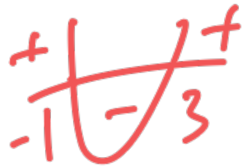
(1) 異なる3つの実数解をもつとき, mの値の範囲を求めよ.

(2) 1つの負の解と2つの正の解をもつとき, mの値の範囲を求めよ.



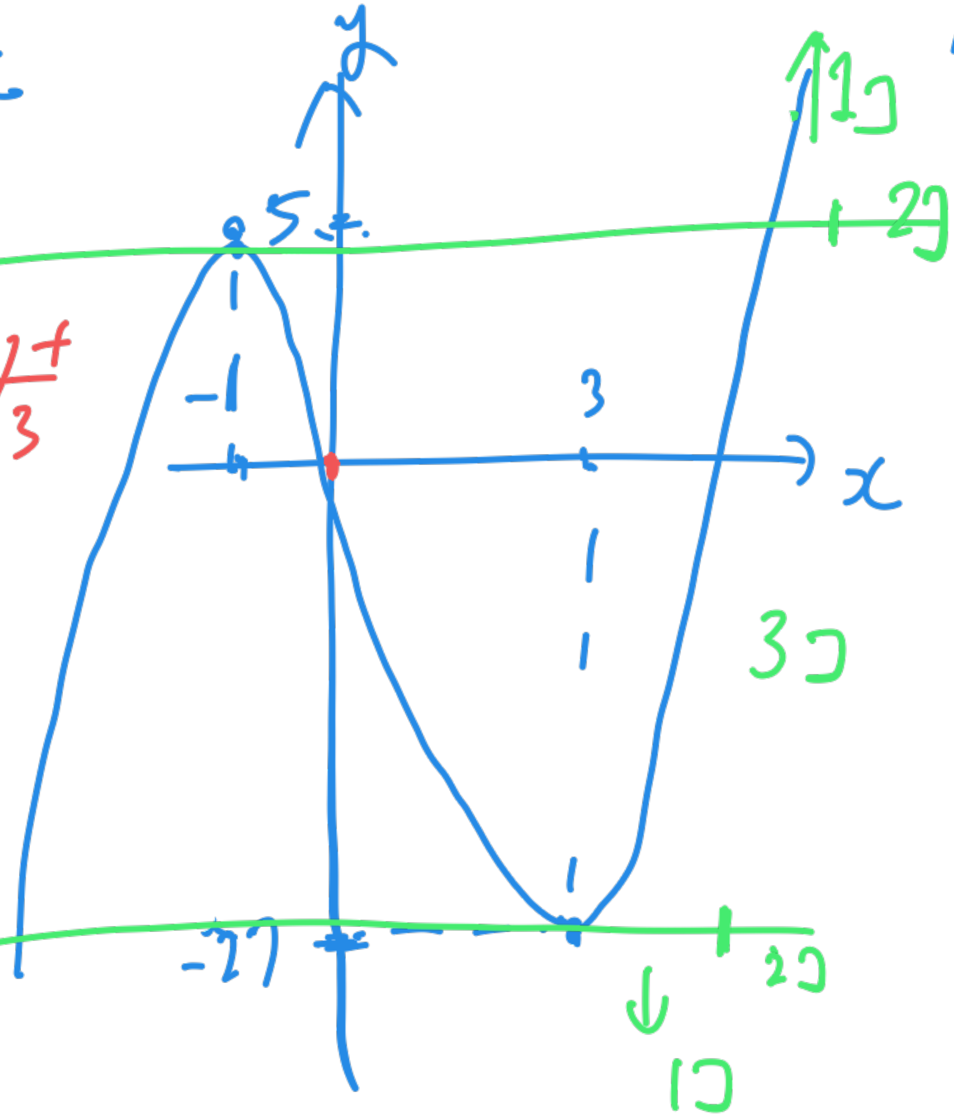
(1) $\begin{cases} y=f(x)=x^3-3x^2-9x \\ y=m \end{cases}$ とおく.

$f'(x)=3x^2-6x-9$
$=3(x+1)(x-3)$



x	$\cdots$	-1	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	5 極大	↘	−27 極小	↗

$f(x)=x^3-3x^2-9x$
$=x(x^2-3x-9)$



グラフより異なる3つの実数解をもつとき

$-27<m<5$

(2)

$-27<m<0$