微分法（数学II）
問題編Part1

○極限値

問1 (1) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2}{x+1}$

Point　$x\to -1$ のとき 分母 $\to 0$, 分子 $\to 0$

$\dfrac{分子}{分母} \to \dfrac{0}{0}$ (不定形) ← $\cancel{\dfrac{A}{0}}$　極限値は存在しない

⇒ このような場合、不定形を避けるために式変形をする！

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+x^2}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2(x+1)}{x+1}$$

$$= \lim_{x\to -1} x^2$$

$$= \underline{1}$$

(2) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x^2+x-2}$ → 式変形をこころみる.

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(2x-1)\cancel{(x-1)}}{(x+2)\cancel{(x-1)}}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{2x-1}{x+2}$$

$$= \underline{\frac{1}{3}}$$

(3) $\lim_{x \to 3} \dfrac{ax^2+bx}{x-3} = 12$ をみたす定数 a, b の値を求めよ.

$x \to 3$ のとき 分母 $\to 0$ であるため、極限値が存在するためには、分子 $\to 0$ である必要がある

$\lim_{x \to 3}(ax^2+bx) = 9a+3b=0$

$9a+3b=0$

$b=-3a$

$\lim_{x \to 3} \dfrac{ax^2-3ax}{x-3} = \lim_{x \to 3} \dfrac{ax\cancel{(x-3)}}{\cancel{x-3}}$

$= \lim_{x \to 3} ax$

$= 3a = 12$ より

$a=4$

$\hookrightarrow b=-12$

また このとき、(十分性の確認)

$\lim_{x \to 3} \dfrac{4x^2-12x}{x-3}$

$= \lim_{x \to 3} \dfrac{4x(x-3)}{x-3}$

$= \lim_{x \to 3} 4x$

$= 12$ となり 確かに極限値が存在し12となる.

$\boxed{a=4,\ b=-12}$

(4) $\displaystyle\lim_{x\to 2}\frac{x^2-(2a+1)x+a^2+a}{x^2-5x+6}=p$ をみたす定数 a, p の値をもとめよ.

但し. $p<0$ とする.

必要条件

$x\to 2$ のとき分母 $\to 0$ のため. 分子 $\to 0$ となる必要がある.

$$\lim_{x\to 2} x^2-(2a+1)x+a^2+a$$

$$= 4-(2a+1)\times 2+a^2+a$$

$$= a^2-3a+2$$

$$= (a-2)(a-1) \quad —☆$$

☆$=0$ より $a=2, 1$

十分性の確認.

i) $a=2$ のとき.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-5x+6}=1 > 0 \text{ より 不適}$$

p

ii) $a=1$ のとき.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{x^2-5x+6}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-1)}{(x-3)\cancel{(x-2)}}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-1}{x-3}=\underline{-1}$$

i) ii) より.

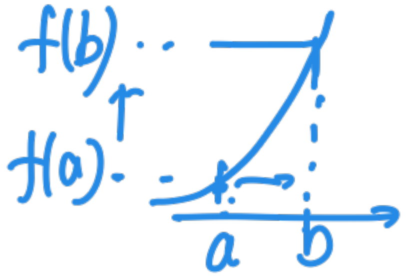
$$\begin{cases} a=1 \\ p=-1 \end{cases}$$

○平均変化率と微分係数

問2　関数 $f(x)=2x^2+4x-1$ について

(1) x の値が a から b まで変化するときの平均変化率を求めよ

(2) 定義に従って $f'(a)$, $f'(2)$ の値を求めよ



$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

(1) $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{(2b^2+4b-1)-(2a^2+4a-1)}{b-a}$$

$$=\frac{2(b^2-a^2)+4(b-a)}{b-a}$$

$$=2(b+a)+4$$

$$=\underline{2a+2b+4}\ /\!/$$

(2) $$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\{2(a+h)^2+4(a+h)-1\}-\{2a^2+4a-1\}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{4ah+2h^2+4h}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}4a+2h+4=\underline{4a+4}\ /\!/$$

$f'(a)$ $/\!/$

$$f'(2)=4\times 2+4$$

$$=\underline{12}\ /\!/$$

$x=a$ における微分係数の定義

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

⑨ 微分係数

問3

(1) 微分の定義に従って $\lim_{x \to 5} \dfrac{5f(x) - xf(5)}{x-5}$ を $f(5)$ と $f'(5)$ で表せ

(2) 微分係数 $f'(a)$ の定義に従って $\lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-2h)}{h}$ を $f'(a)$ で表せ

(1)
$$\lim_{x \to 5} \frac{5\left(\boxed{f(x)-f(5)}\right) + 5f(5) - xf(5)}{x-5}$$
$$= \lim_{x \to 5} \left\{ 5 \cdot \boxed{\frac{f(x)-f(5)}{x-5}} - f(5) \cancel{\frac{x-5}{x-5}} \right\}$$
$$= 5 \cdot f'(5) - f(5)$$
$$= \underline{5f'(5) - f(5)}$$

(2)
$$\lim_{h \to 0} \left\{ \frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a)-f(a-2h)}{h} \right\}$$
$$= f'(a) + \lim_{h \to 0} \frac{f(a)-f(a-2h)}{h}$$
$$= f'(a) - \lim_{h \to 0} \frac{f(a-2h)-f(a)}{h}$$
$$= f'(a) - \lim_{h \to 0} (-2) \cdot \frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}$$
$$= f'(a) + 2\lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{f(a-2h)-f(a)}{-2h}}_{f'(a)} = \underline{3f'(a)}$$

○ 導関数

xとtについてそれぞれ微分する

$3x^2+6t$

問4. (1) $V = 3x^2 + 2t^2x - 4t^3$ について $\dfrac{dV}{dx}$, $\dfrac{dV}{dt}$ を求めよ

(2) $v = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$ を t について微分せよ

(1) $\dfrac{dV}{dx} = (3x^2)' + (2t^2x)' - (4t^3)'$

$= 6x + 2t^2 - 0$

$= \underline{6x + 2t^2}$ //

$\dfrac{dV}{dt} = (3x^2)' + (2xt^2)' - (4t^3)'$

$= 0 + 4xt - 12t^2$

$= \underline{4xt - 12t^2}$ //

(2) $\dfrac{dv}{dt} = (v_0 t)' - \left(\frac{1}{2}gt^2\right)'$

$= \underline{v_0 - gt}$ //

次の関数を微分せよ

(3) $y=(3x-4)(x+3)$

$$y'=(3x-4)'(x+3)+(3x-4)(x+3)'$$

$$=3(x+3)+(3x-4)\times 1$$

$$=\underline{6x+5}$$

(4) $y=(4x-3)^3$

$$y'=\{(4x-3)^3\}'$$

$$=3\cdot(4x-3)^2\times(4x-3)'$$

$$=3(4x-3)^2\times 4$$

$$=\underline{12(4x-3)^2}$$

Point

積の微分

$$\{f(x)\cdot g(x)\}'=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$$

$$\{f(x)\cdot g(x)\cdot l(x)\}'=f'(x)\,g(x)\,l(x)+f(x)\,g'(x)\,l(x)+f(x)\,g(x)\,l'(x)$$

累乗の微分

$$[\{f(x)\}^n]'=n\{f(x)\}^{n-1}\times f'(x)$$

(5) $y = (2x-1)^2(x+4)$

$$y' = \{(2x-1)^2\}'(x+4) + (2x-1)^2 \cdot (x+4)'$$

$$= \{2 \cdot (2x-1) \times (2x-1)'\}(x+4) + (2x-1)^2 \cdot 1$$

$$= \{2 \cdot (2x-1) \times 2\}(x+4) + (2x-1)^2$$

$$= 4(2x-1)(x+4) + (2x-1)^2$$

$$= (2x-1)(6x+15)$$

$$= \underline{3(2x-1)(2x+5)} \;/\!/$$

問5. xの多項式$f(x)$の最高次の項の係数は1で、→ ~~係数 $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_0$~~

$(x-1)f'(x) = 2f(x) + 8$ が成り立つ。このときの$f(x)$を求めよ。

解答

$f(x)$ の最高次の項を x^n とする。

$f'(x)$ の 〃 は nx^{n-1}

与式は恒等式であるため最高次の項を左辺と右辺で比較する

$(左辺の最高次) = x \cdot nx^{n-1}$

$= nx^n$

$(右辺の最高次) = 2 \cdot x^n$

比較して $n=2$ とわかる。

以上より $f(x)$は2次式で

$f(x) = x^2 + ax + b$ とおける

$f'(x) = 2x + a$

$(左辺) = (x-1)(2x+a)$

$= 2x^2 + (a-2)x - a$

$(右辺) = 2x^2 + 2ax + 2b + 8$

左辺と右辺を比較して

未知数2つ 式は2つ

$2a = a - 2$, $-a = 2b + 8$

$a = -2$, $2 = 2b + 8$

$b = -3$

$f(x) = x^2 - 2x - 3$ //