微分法（数学II）
問題編Part2

○ 接線

問1 次の接線の方程式を求めよ

(1) 曲線 $y = -4x^3 + 2x^2 - x + 8$ 上の x座標が1 である点における 接線

$f(x) = -4x^3 + 2x^2 - x + 8$ とおくと

$f'(x) = -12x^2 + 4x - 1$

公式

$$\boxed{y - f(a) = f'(a)(x - a)}$$

$y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

$y = (-9)(x - 1) + (5)$

$= \underline{-9x + 14}$ //

(2) 放物線 $y = x^2 - 5x$ について、傾きが3である接線

接点$(a, f(a))$ → 傾き

接点の座標を$A(a, f(a))$とおいて.

$f'(x) = 2x - 5$

点Aにおける傾き $f'(a) = 3$ より.

$f'(a) = 2a - 5 = 3$

$a = 4$,

→ 接線の方程式は

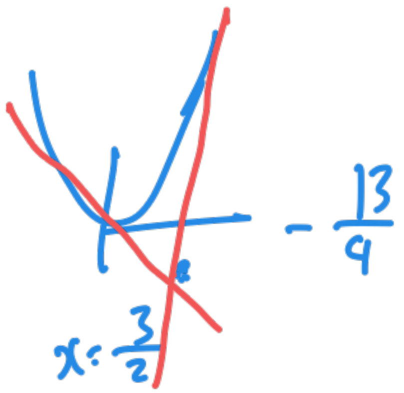
$y - f(4) = f'(4)(x - 4)$

$y = 3(x - 4) + (16 - 20)$

$= \underline{3x - 16}$ //

問2. 放物線 $y=x^2-3x-1$ に対して点(3, −5)から引いた接線の方程式と、

そのときの接点の座標を求めよ



☆接点の座標 → 傾き

接点の座標を $A(a,\ a^2-3a-1)$ とおく。

$(f(x)=x^2-3x-1,\ f'(x)=2x-3)$

接線の傾きは $f'(a)=2a-3$.

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

$y=(2a-3)x-2a^2+3a+a^2-3a-1$

$=(2a-3)x-a^2-1$ —☆

☆が点(3, −5)を通るため

$-5=(2a-3)\cdot 3-a^2-1$ ↗

↘ $-5=6a-9-a^2-1$

$a^2-6a+5=0$

$(a-5)(a-1)=0$

$a=5, 1$

a=1のとき、接線の方程式は $y=-x-2$

〃 の座標は (1, −3)

a=5のとき、〃 の方程式は

$y=7x-26$

〃 の座標は

(5, 9)

問3. 曲線 $y = x^3 - \frac{7}{2}x$ 上の点$(2, 1)$を通る接線の方程式を求めよ ①

解1 接点の座標 → 接線の方程式

$f(x) = x^3 - \frac{7}{2}x$ とおく.

$f'(x) = 3x^2 - \frac{7}{2}$

接点 $A(a, f(a))$ での接線の方程式は

$$y = \left(3a^2 - \frac{7}{2}\right)(x - a) + a^3 - \frac{7}{2}a$$

$$= \left(3a^2 - \frac{7}{2}\right)x - 2a^3 \quad — ☆$$

☆が点$(2, 1)$を通るため,

$$1 = \left(3a^2 - \frac{7}{2}\right) \times 2 - 2a^3$$

$$2a^3 - 6a^2 + 8 = 0$$

$$\boxed{a^3 - 3a^2 + 4 = 0}$$

→ 因数分解

$a^3 - 3a^2 + 4$

$= (a-2)(a^2 - a - 2)$

$= (a-2)^2(a+1) = 0$

$a = 2, -1$

$a = 2$のとき, 接線の方程式は

$$y = \left(3 \cdot 2^2 - \frac{7}{2}\right)x - 16$$

$$= \frac{17}{2}x - 16 \quad —①$$

接点の座標は$(2, 1)$

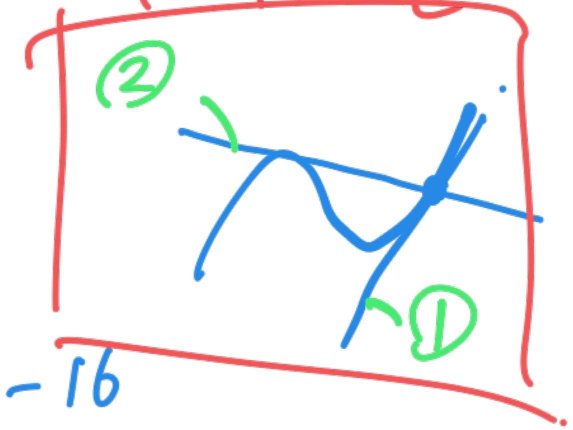
$a = -1$のとき 接線の方程式は

$$y = \left(3(-1)^2 - \frac{7}{2}\right)x + 2$$

$$= -\frac{1}{2}x + 2 \quad —②$$

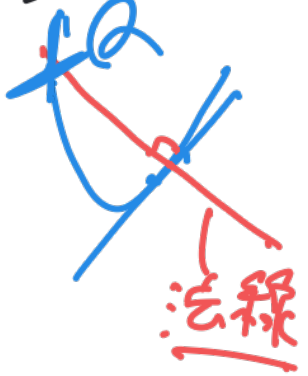
接点は $\left(-1, \frac{5}{2}\right)$

2	1	−3	0	4
		2	−2	−4
	1	−1	−2	0



問4 曲線 $y=x^2$ 上の点 $P(a, a^2)$ における法線とこの曲線の交点のうち点Pでない方を点Qとする. 但し $a \neq 0$ とする.

(1) 法線の方程式を求めよ　(2) 点Qの座標を求めよ



Point 法線の方程式

$$y - f(a) = \frac{-1}{f'(a)}(x-a)$$

接線と法線は直交している

→ 傾きの積は -1 ということ.

$$f'(a) \times \boxed{} = -1$$

(1) $f(x) = x^2$. $f'(x) = 2x$

Pでの法線は

$$y = \frac{-1}{2a}(x-a) + a^2$$

$$= -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2} \text{ — ☆}$$

☆と曲線の交点は

$$x^2 = -\frac{1}{2a}x + a^2 + \frac{1}{2}$$

$$x^2 + \frac{1}{2a}x - a^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$(x-a)\left(x+a+\frac{1}{2a}\right) = 0$$

$$\underbrace{x = a,\ -\left(a+\frac{1}{2a}\right)}_{Q} \leftarrow$$

y=x²の方に代入する!

$a \rfloor\ 1,\ \frac{1}{2a},\ -a^2-\frac{1}{2}$

$\quad a \quad a^2+\frac{1}{2}$

$1.\ a+\frac{1}{2a}.$ ↗ レ

Qの座標は

$$\left(-\left(a+\frac{1}{2a}\right), \underbrace{\left(a+\frac{1}{2a}\right)^2}_{\overset{\|}{a^2+\frac{1}{4a^2}+1}}\right)$$ //

$\overset{f(x)}{}$ $\overset{g(x)}{}$

問5. 放物線 $y=\overset{f(x)}{x^2-3x}$ …① $y=\overset{g(x)}{2x^2+5x-2}$ …② の両方に接する直線の方程式を求めよ.

方針 ①の接点をおいて、接線の方程式 ②の接点をおいて、接線の方程式 これらを係数比較して一致させる

$(a, f(a)) \rightarrow$ $(b, g(b)) \rightarrow$

① について

$f(x) = x^2 - 3x$ とおくと

$f'(x) = 2x - 3$

接点 A $(a, f(a))$ において接線の方程式は

$y - (a^2 - 3a) = (2a-3)(x-a)$

$y = (2a-3)x - a^2$ —①'

② について

$g(x) = 2x^2 + 5x - 2$ とおくと

$g'(x) = 4x + 5$

接点 B $(b, g(b))$ において、接線の方程式は

$y - (2b^2 + 5b - 2) = (4b+5)(x-b) \rightarrow$

$\rightarrow y = (4b+5)x - (2b^2+2)$ —②'

ここで、①'と②'が一致するので

$$\begin{cases} 2a-3 = 4b+5 \rightarrow a = 2b+4 \\ -a^2 = -2b^2-2 \end{cases}$$

$\rightarrow -(4b^2+16b+16) = -2b^2-2$

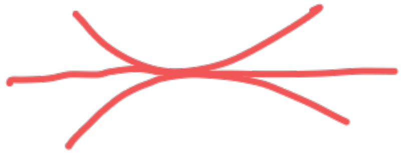
⋮

$b = -1, -7$

$\boxed{b=-1}$ $y = x - 4$

$\boxed{b=-7}$ $y = -23x - 100$

問6. 2つの曲線 $\overset{①}{y=2x^3}$, $\overset{②}{y=3x^2+a}$ が共有点をもち，さらにこの点において接線を共有する. このとき. aの値 および 共通な接線の方程式を求めよ



①, $y=f(x)=2x^3$.

$f'(x)=6x^2$

② $y=g(x)=3x^2+a$

$g'(x)=6x$

共有している接点 $B\left(b,\ \begin{matrix}f(b)\\g(b)\end{matrix}\right)$ とおくと.

①の接線は

$y-\boxed{f(b)}=\boxed{f'(b)}(x-b)$ —①'

②の 〃 は

$y-\boxed{g(b)}=\boxed{g'(b)}(x-b)$ − ②'

①'と②'が完全に一致するので

$f(b)=g(b)$

かつ

$f'(b)=g'(b)$ ↗

$$\begin{cases}2b^3=3b^2+a & —③\\ 6b^2=6b & —④\end{cases}$$

$6b^2=6b$

$b(b-1)=0$

$b=0,1$

$b=0$ ③は

$a=0$ → ⇒ 接線の方程式は

$y=0$

$b=1$ ③は

$2=3+a$ ⇒ 接線の方程式は

$a=-1$ → $y=6x-4$.