関西医科大学
数学2022
Part3

1 ボタンを1回押すたびに3桁の数字が表示される装置がある．各桁には，ある出現確率で1，2，3，4，5のいずれかの数字が現れ，3つの数字がすべて一致したときに「あたり」となる．この装置には状態Aと状態Bの2つの状態があり，そのときの状態に従って数字の出現確率がすべての桁で同時に変化する．この状態はボタンを押すたびに決定され，状態Aは $\frac{1}{4}$，状態Bは $\frac{3}{4}$ の確率で選ばれる．また，状態Aのときの数字の出現確率は，1の出現確率のみ $\frac{3}{5}$ で，残りの2〜5はそれぞれ $\frac{1}{10}$ であり，状態Bのときの数字の出現確率は，1，2，3は $\frac{1}{5}$，5は $\frac{2}{5}$ で，4は出現しない．

この装置について，以下の確率を求めよ．なお，各設問の答えは解答用紙（省略）の指定欄に既約分数で記入すること．

(1) 装置の状態が状態Aのとき，ボタンを押して「あたり」が出る確率

(2) 装置の状態が状態Bのとき，ボタンを押して「あたり」が出る確率

(3) ボタンを押して「あたり」が出る確率

(4) ボタンを押して「あたり」が出たときに，装置の状態が状態Aである条件付き確率

2 関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{6x^2+17x+10}{3x-2}$ と定めるとき，以下の設問に答えよ．なお各設問の答えは解答用紙（省略）の指定欄に記入し，左の枠内には答えの導出過程を簡潔に記入すること．

(1) $f(x)>0$ を満たす x の値の範囲を求めよ．

(2) $f(x)=Ax+B+\dfrac{C}{3x-2}$ が x についての恒等式となるように，定数 A，B，C の値を定めよ．

(3) $f(n)$ の値が正の整数となるような整数 n をすべて求めよ．

3 関数 $f(x)=\pi x\cos(\pi x)-\sin(\pi x)$，$g(x)=\dfrac{\sin(\pi x)}{x}$ を考える．ただし，x の範囲は $0<x\leqq 2$ とする．以下の設問に答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の増減を調べ，グラフの概形を描け．

(2) $f(x)=0$ の解がただ1つ存在し，それが $\frac{4}{3}<x<\frac{3}{2}$ の範囲にあることを示せ．

(3) n を整数とする．各 n について，直線 $y=n$ と曲線 $y=g(x)$ の共有点の個数を求めよ．

（出典：お茶の水女子大学 2018 年）

4 xy 平面上に，2点 $\mathrm{P}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$，$\mathrm{Q}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$ をとる．線分PQの中点の x 座標を t とし，線分PQの長さを L とおく．θ が $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ の範囲を動くとき，以下の設問に答えよ．なお各設問の答えは解答用紙（省略）の指定欄に記入し，左の枠内には答えの導出過程を簡潔に記入すること．

(1) 直線PQの方程式を t を用いて表せ．

(2) L の値の範囲を求めよ．

(3) L が最大値をとるときの θ の値を求めよ．

(4) 線分PQが通過する領域を xy 平面上に図示せよ．

5 座標空間において，$x^2+y^2\leqq 3$，$0\leqq z\leqq 3$ で表される円柱を C とする．以下の設問に答えよ．

(1) C のうち，$\sqrt{3}z\leqq y$ を満たす部分を D_1 とするとき，D_1 の体積を求めよ．

(2) C のうち，$z\leqq -\sqrt{3}y$ を満たす部分を D_2 とするとき，D_2 の体積を求めよ．

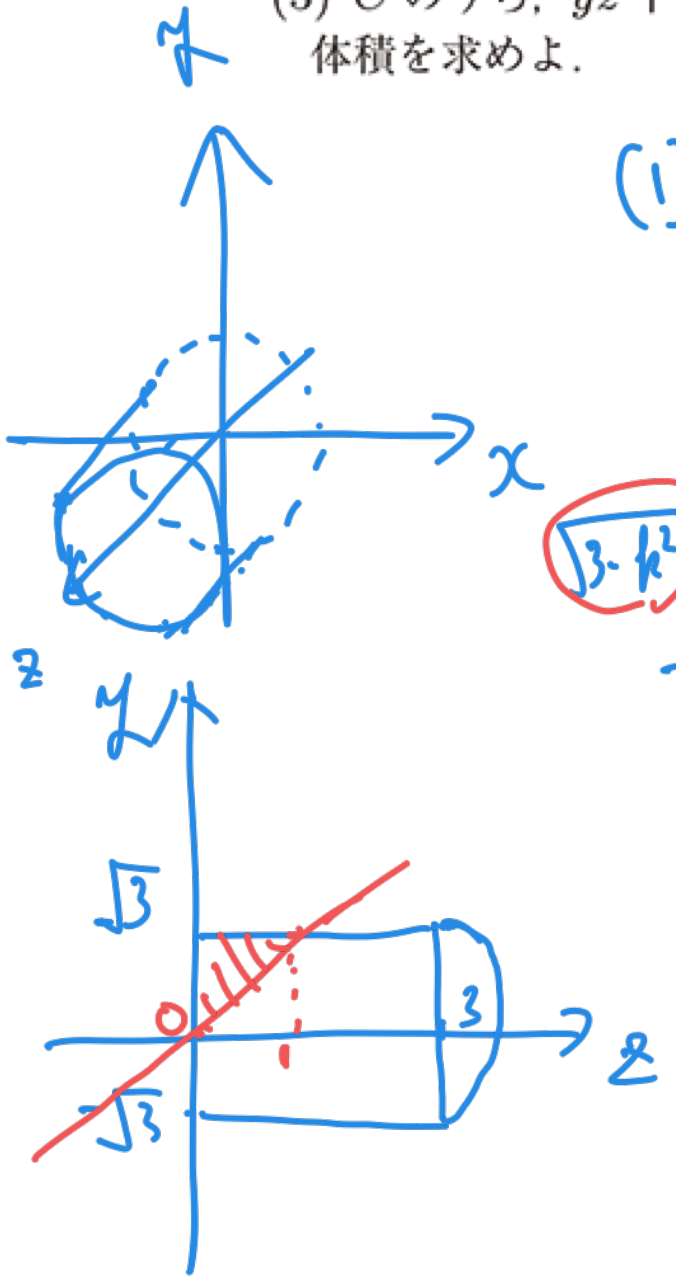
(3) C のうち，yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分を D とするとき，D の体積を求めよ．

5 座標空間において，$x^2+y^2 \leqq 3$，$0 \leqq z \leqq 3$ で表される円柱を C とする．以下の設問に答えよ．

(1) C のうち，$\sqrt{3}z \leqq y$ を満たす部分を D_1 とするとき，D_1 の体積を求めよ．

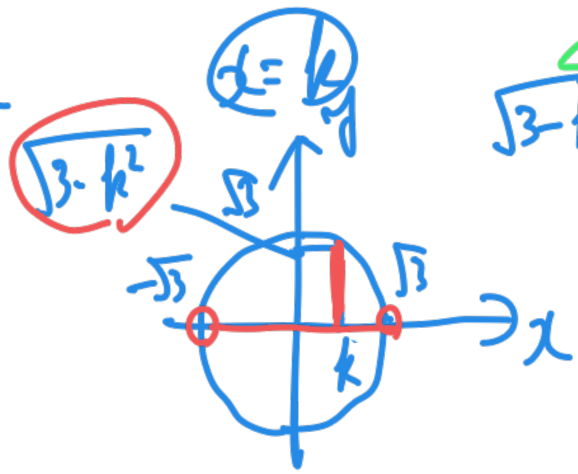
(2) C のうち，$z \leqq -\sqrt{3}y$ を満たす部分を D_2 とするとき，D_2 の体積を求めよ．

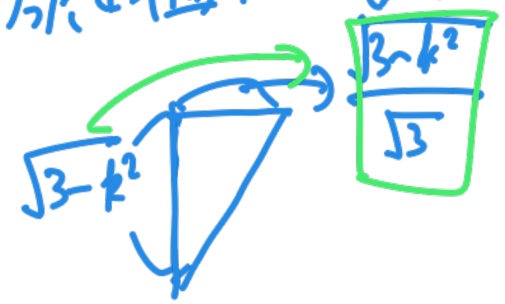
(3) C のうち，yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分を D とするとき，D の体積を求めよ．



(1) $y \geqq \sqrt{3}z$ を満たす立体 D_1 について．

$x=k$ で切った断面について考える．





Point 相似比を使って考える．

$$\int_{-\sqrt3}^{\sqrt3} \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3-k^2}}{\sqrt3} \times \sqrt{3-k^2}$$

$$= \int_{-\sqrt3}^{\sqrt3} \frac{3-k^2}{2\sqrt3}$$

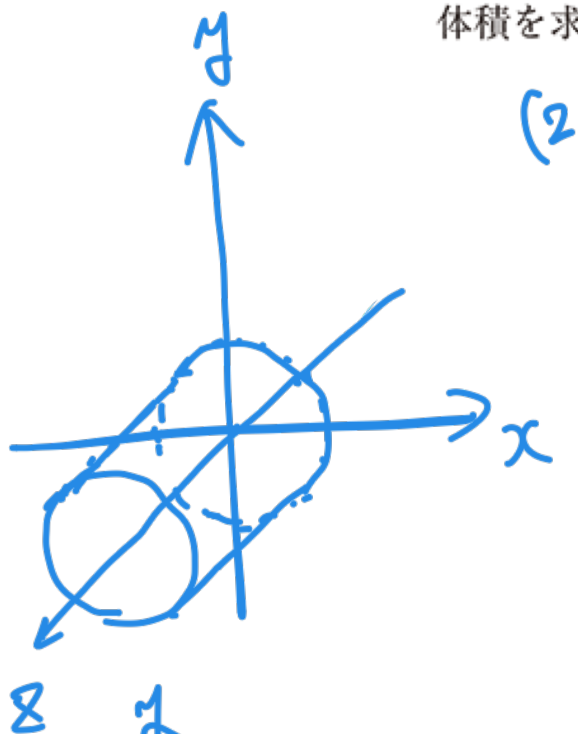
$$= \frac{1}{2\sqrt3} \times 2\left[3k - \frac{1}{3}k^3\right]_0^{\sqrt3} = \frac{2}{2\sqrt3} \times 2\sqrt3 = \underline{2}$$

5 座標空間において，$x^2+y^2 \leqq 3$，$0 \leqq z \leqq 3$ で表される円柱を C とする．以下の設問に答えよ．

(1) C のうち，$\sqrt{3}z \leqq y$ を満たす部分を D_1 とするとき，D_1 の体積を求めよ．

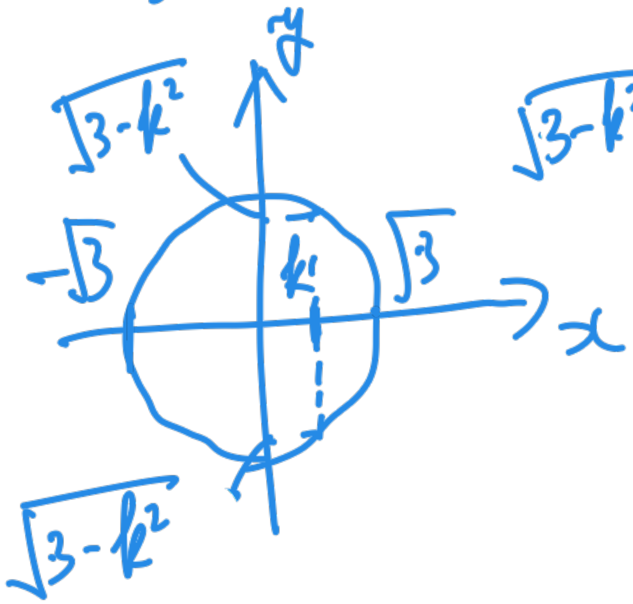
(2) C のうち，$z \leqq -\sqrt{3}y$ を満たす部分を D_2 とするとき，D_2 の体積を求めよ．

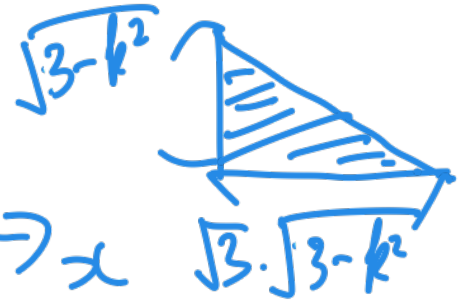
(3) C のうち，yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分を D とするとき，D の体積を求めよ．

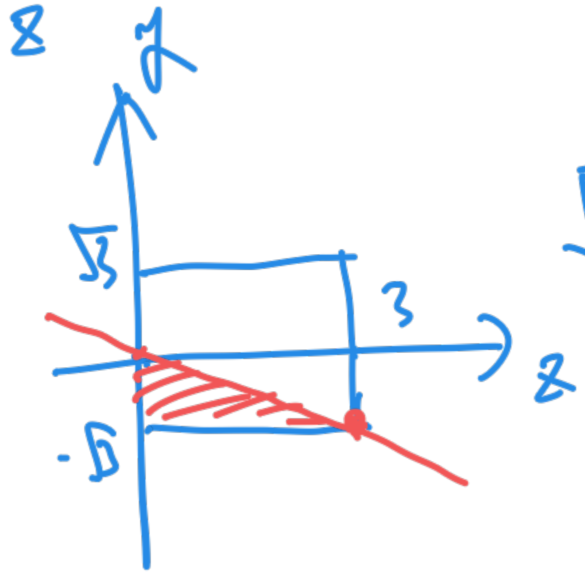


(2) $y \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}z$ を満たす部分 D_2 の体積について．

$x=k$ で切ると断面は







$$\int_{-\sqrt3}^{\sqrt3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3-k^2}\times\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-k^2}\right)dk$$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\int_{-\sqrt3}^{\sqrt3}(3-k^2)\,dk$$

$$=\frac{\sqrt3}{2}\times 2\int_{0}^{\sqrt3}(3-k^2)\,dk$$

$$=\sqrt3\left[3k-\frac{1}{3}k^3\right]_0^{\sqrt3}$$

$$=\sqrt3\left(3\sqrt3-\frac{1}{3}\cdot 3\sqrt3\right)$$

$$=\sqrt3\times 2\sqrt3 = \underline{6}$$

5 座標空間において，$x^2+y^2 \leqq 3$，$0 \leqq z \leqq 3$ で表される円柱を C とする．以下の設問に答えよ．

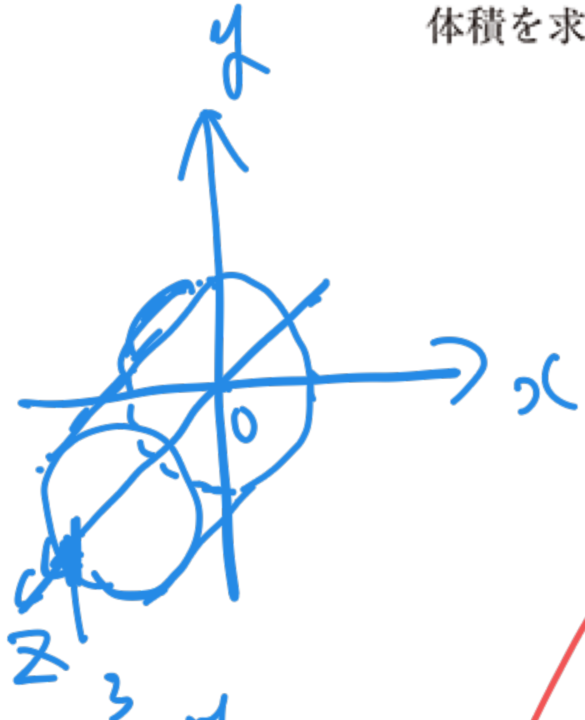
(1) C のうち，$\sqrt{3}z \leqq y$ を満たす部分を D_1 とするとき，D_1 の体積を求めよ．

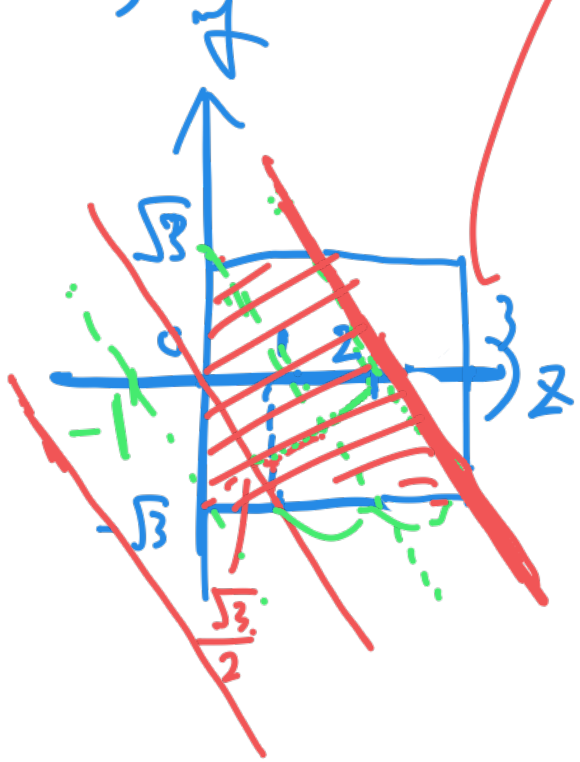
(2) C のうち，$z \leqq -\sqrt{3}y$ を満たす部分を D_2 とするとき，D_2 の体積を求めよ．

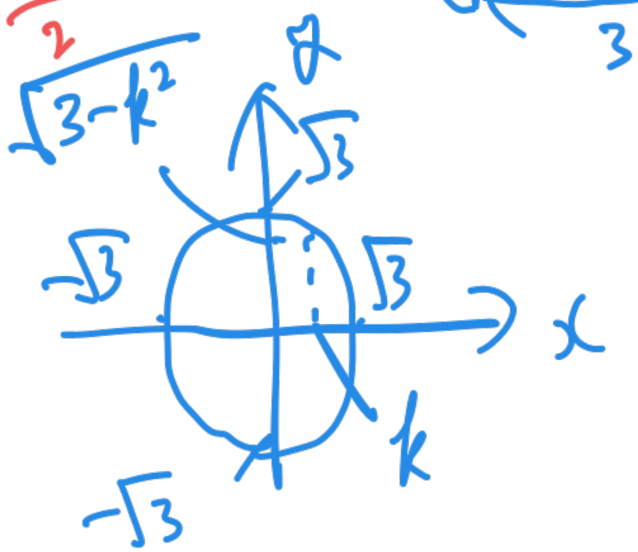
(3) C のうち，yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分を D とするとき，D の体積を求めよ．

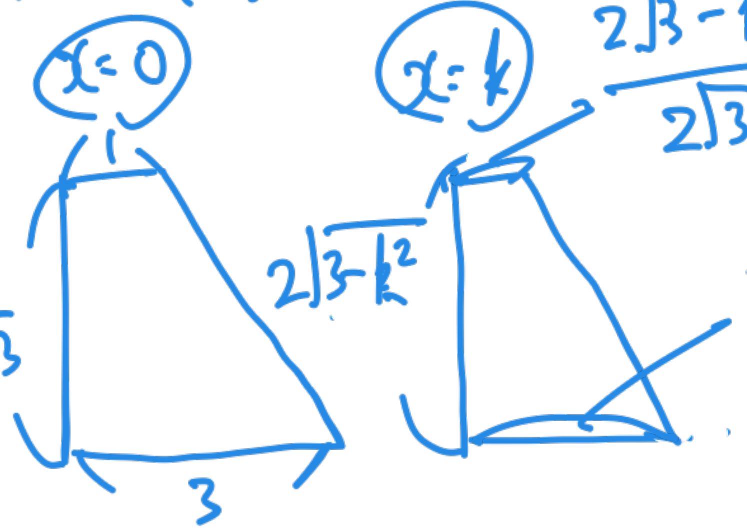
$y=-\sqrt{3}z$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる D について．

$x=k$ の断面では．$S(k)$ では









$$\frac{2\sqrt{3-k^2}}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3-k^2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{3-k^2}}{3}$$

$\sqrt{3}\cdot\sqrt{3-k^2}$

$$S(k) = \frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\sqrt{3}\sqrt{3-k^2}}{3} + \sqrt{3}\cdot\sqrt{3-k^2}\right) \times \cancel{2}\sqrt{3-k^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}\sqrt{3-k^2}}{3} \times \sqrt{3-k^2}$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3}(3-k^2)$$

5 座標空間において，$x^2+y^2 \leqq 3$，$0 \leqq z \leqq 3$ で表される円柱を C とする．以下の設問に答えよ．

(1) C のうち，$\sqrt{3}z \leqq y$ を満たす部分を D_1 とするとき，D_1 の体積を求めよ．

(2) C のうち，$z \leqq -\sqrt{3}y$ を満たす部分を D_2 とするとき，D_2 の体積を求めよ．

(3) C のうち，yz 平面上の直線 $y+\sqrt{3}z=0$ からの距離が $\sqrt{3}$ 以下となる部分を D とするとき，D の体積を求めよ．

$$\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} S(k)\,dk = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \frac{4\sqrt{3}}{3}(3-k^2)\,dk$$

$$= \frac{4\sqrt{3}}{3} \times 2\left[3k - \frac{1}{3}k^3\right]_0^{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{8\sqrt{3}}{3}(3\sqrt{3}-\sqrt{3})$$

$$= \frac{8\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3}} \cdot 2\cancel{\sqrt{3}}$$

$$= \underline{16}$$

Point $x=k$ における断面積を考える

→ 相似等の図形的性質を加味した $S(k)$ を考える．